## **基础课49 直线与圆锥曲线的位置关系**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **考点考向** | **课标要求** | **真题印证** | **考频热度** | **核心素养** |
| 直线与椭圆的位置关系 | 理解 | 2023年新高考Ⅱ卷  2023年全国乙卷（文）  2023年北京卷  2023年天津卷 | ★★★ | 逻辑推理  数学运算  直观想象 |
| 直线与双曲线的位置关系 | 理解 | 2023年新高考Ⅱ卷  2023年全国甲卷（理）  2023年全国乙卷（文） | ★★★ | 逻辑推理  数学运算  直观想象 |
| 直线与抛物线的位置关系 | 理解 | 2023年新高考Ⅰ卷  2023年新高考Ⅱ卷  2023年全国甲卷（理）  2023年天津卷 | ★★★ | 逻辑推理  数学运算  直观想象 |
| 命题分析预测 | 从近几年高考的情况来看，直线与圆锥曲线的位置关系问题主要以解答题的形式出现，属于难题，常常伴随弦长、定点、定直线、定值等考点，命题热点是以圆锥曲线的定义为载体求出曲线方程，然后根据直线与圆锥曲线的位置关系进行求解.预计2025年高考命题情况点为抛物线与直线和圆的综合 | | | |

### **基础知识·诊断**

#### **夯实基础**

##### **一、直线与圆锥曲线的位置关系**

1.直线与圆锥曲线的位置关系有①相交、②相切、③相离；相交有两个交点（特殊情况除外），相切有一个交点，相离无交点.

2.判断直线与圆锥曲线的位置关系时，通常将直线的方程代入圆锥曲线的方程,消去（或）得到一个关于变量（或）的方程（或）.

（1）当时，可考虑一元二次方程的判别式 ，若，则直线与曲线相交；若，则直线与曲线相切；若，则直线与曲线相离.

（2）当时，即得到一个一次方程，则直线与曲线相交，且只有一个交点，此时，若为双曲线，则直线与双曲线的⑦渐近线平行；若为抛物线，则直线与抛物线的⑧对称轴平行或重合.

##### **二、圆锥曲线的弦长公式**

设直线与圆锥曲线交于点,，则或⑪⑫.

#### **诊断自测**

##### **题组1 走出误区**

1. 判一判.（对的打“√”，错的打“×”）

（1） 直线与椭圆公共点的个数最多为2.( √ )

（2） 若直线与双曲线有唯一公共点，则直线与双曲线相切.( × )

（3） 若直线与抛物线相切，则直线与抛物线有唯一公共点.( √ )

（4） “直线与抛物线有唯一公共点”是“直线与抛物线相切”的充分不必要条件.( × )

2. （多选题）（易错题）已知直线与椭圆，则下列结论正确的是( BCD ).

A. 若与至少有一个公共点，则

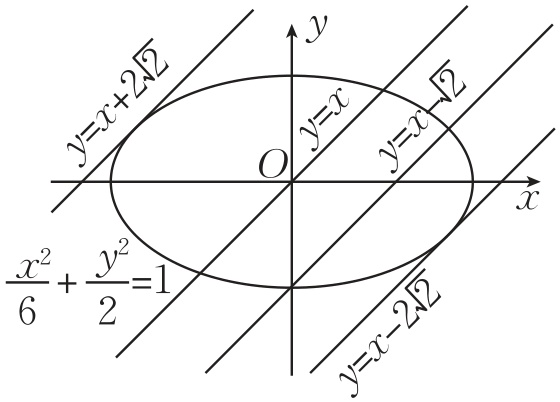
B. 若与有且仅有两个公共点，则

C. 若，则上到的距离为5的点只有1个

D. 若，则上到的距离为1的点只有3个

【**易错点**】直线与椭圆的公共点问题，一般需要考虑判别式，如果不考虑判别式就可能产生漏解或得出不符合题意的结论.

[解析]联立消去得，则判别式.对于，令，得，故错误；对于，令，得，故正确；对于，令直线与椭圆相切，则，即，直线与之间的距离为5，故正确；对于，如图，直线与,之间的距离均为1，因此上到的距离为1的点只有3个，故正确.故选.



##### **题组2 走进教材**

3. （人教A版选修①P138·T5改编）若过抛物线的焦点作一条倾斜角为 的直线交抛物线于,两点，则.

[解析]依题意，设,，抛物线的焦点坐标是，直线的方程为，由得，则，则.

4. （人教A版选修①P128·T13改编）已知双曲线，过点的直线与双曲线相交于,两点，则不能（填“能”或“不能”）成为线段的中点.

[解析]当直线垂直于轴时，因为过点的直线方程为，此时不能成为线段的中点.当直线不垂直于轴时，设,,且为线段的中点，因为,在双曲线上，所以两式相减得，

因为,,所以，所以直线的斜率为2,则直线的方程为,将直线方程与双曲线方程联立得得,此时,故方程无解，所以这样的直线不存在.

##### **题组3 走向高考**

5. [2023·新高考Ⅱ卷]已知椭圆的左、右焦点分别为，，直线与交于，两点，若面积是面积的2倍，则( C ).

A. B. C. D.

[解析]由可得，由椭圆与直线交于，两点，得,解得，由题意得，，设两焦点到直线的距离分别为，，由点到直线的距离公式可知，，因为，所以，即，即，解得或（舍去）.故选.

### **考点聚焦·突破**

#### **考点一 直线与圆锥曲线的位置关系的判断［师生共研］**

典例1 （1）当取何值时，直线与椭圆有两个公共点？仅有一个公共点？无公共点？

（2）当取何值时，直线与双曲线有两个公共点？仅有一个公共点？无公共点？

（3）当为何值时，直线与抛物线有两个公共点？仅有一个公共点？无公共点？

[解析]（1）依题意，联立消去得，

所以.

要使直线与椭圆有两个公共点，

则，即，解得.

要使直线与椭圆有且仅有一个公共点，

则，即，解得，

所以当时，直线和椭圆有且仅有一个公共点.

要使直线与椭圆无公共点，

则，即，解得或.

综上，当时，直线和椭圆有两个公共点；

当时，直线和椭圆有且仅有一个公共点；

当或时，直线和椭圆无公共点.

（2）联立

消去整理得，

要使直线与双曲线有两个公共点，则

整理得

解得或或.

要使直线与双曲线仅有一个公共点，

当,即时，直线与双曲线的渐近线平行，方程化为，故方程有唯一实数解，即直线与双曲线相交，有且只有一个公共点，满足题意；

当时，因为直线与双曲线仅有一个公共点，

所以，解得.

要使直线与双曲线无公共点，则

解得或.

综上，当或或时，直线与双曲线有两个公共点；

当或时，直线与双曲线有且仅有一个公共点；

当或时，直线与双曲线无公共点.

（3）由得.

当时，方程化为一次方程，

该方程只有一解，原方程组只有一组解

所以直线与抛物线只有一个公共点.

当时，二次方程的判别式，

当时，，解得或，

所以当或时，直线与抛物线有两个公共点；

由得，此时直线与抛物线相切，只有一个公共点；

由得或，此时直线与抛物线无公共点.

综上，当或时，直线与抛物线有两个公共点；

当或时，直线与抛物线仅有一个公共点；

当或时，直线与抛物线无公共点.



**直线与圆锥曲线位置关系的两种判定方法**

|  |  |
| --- | --- |
| 代数法 | 联立直线与圆锥曲线的方程可得到一个关于,的方程组，消去（或）得一元方程，此方程根的个数即交点个数，方程组的解即交点坐标 |
| 几何法 | 画出直线与圆锥曲线的图象，根据图象判断公共点的个数 |

##### **针对训练**

1. 已知椭圆，直线，则直线与椭圆的位置关系为( A ).

A. 相交 B. 相切 C. 相离 D. 不确定

[解析]对于直线，整理得，

令解得故直线过定点.

因为，所以点在椭圆的内部，

所以直线与椭圆相交.故选.

2. 直线与双曲线的交点情况是( C ).

A. 恒有一个交点 B. 存在，使其有两个交点

C. 至多有一个交点 D. 存在，使其有三个交点

[解析]将代入得.当时，无解；当时，.故至多有一个交点.故选.

3. [2024·沈阳模拟]已知直线与抛物线有且仅有一个公共点，直线与抛物线相切，则是的( C ).

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

[解析]因为抛物线的对称轴为轴，所以若一条直线与抛物线有且仅有一个公共点，则该直线与抛物线相切或者该直线与轴垂直，又因为直线存在斜率，与轴不垂直，所以“直线与抛物线有且仅有一个公共点”等价于“直线与抛物线相切”，则是的充要条件.故选.

#### **考点二 圆锥曲线的切线问题［师生共研］**

典例2 （1）（一题多解）已知点,在椭圆上，则椭圆在点处的切线方程为.

（2）（一题多解）已知点在双曲线上，则双曲线在点处的切线方程为.

（3）（一题多解）已知是抛物线上一点，且位于第一象限，点到抛物线的焦点的距离为6，则抛物线在点处的切线方程为.

[解析]（1）（法一：代数法）由题意可知，切线的斜率存在，所以设切线方程为，

将代入，得，化简整理得，令，

化简整理得，即，解得，

所以切线方程为，即.

（法二：公式法）由题意得，椭圆在点处的切线方程为，即.

（2）（法一：代数法）可知切线的斜率存在且，所以设切线方程为，将代入，得，

化简整理得，

令，

解得，

所以切线方程为，即.

（法二：公式法）因为在双曲线上，所以双曲线在点处的切线方程为，即.

（法三：导数法）由可得，

根据题目条件，可知求曲线在点处的切线方程，

，所以曲线在点处的切线斜率，

则曲线在点处的切线方程为，化简得，

所以双曲线在点处的切线方程为.

（3）（法一:代数法）由抛物线定义，到抛物线的焦点的距离为，得，代入方程得，设过点的切线方程为，联立抛物线方程得，由，即，解得，所以切线方程为，即.

（法二：公式法）由法一可知点在抛物线上，所以抛物线在点处的切线方程为，即.



**求圆锥曲线切线方程的两种方法**

|  |  |
| --- | --- |
| 代数法 | 联立直线与圆锥曲线的方程，根据来求解 |
| \*公式法 | ①过椭圆上一点的切线方程为；  ②过双曲线上一点的切线方程为；  ③过抛物线上一点的切线方程为 |

##### **针对训练**

1. 椭圆上两条互相垂直的切线的交点必在一个与椭圆同心的圆上，该圆称为此椭圆的蒙日圆.若椭圆的蒙日圆为，则( B ).

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

[解析]当椭圆两切线与坐标轴垂直时，则两切线的交点坐标为，该点在圆上，所以，解得；当椭圆两切线的斜率同时存在时，不妨设两切线的斜率分别为，，

设两切线的交点坐标为，并设过该点的直线方程为，

联立消去得，

则，

化简得，由根与系数的关系得，

整理得，解得.

故选.

2. 已知为坐标原点，过双曲线上一点作双曲线的切线，若直线与直线的斜率均存在，且斜率之积为，则双曲线的离心率为.

[解析]利用公式法，设处的切线方程为，则切线的斜率，因为，所以，即，所以双曲线的离心率为.

3. 已知抛物线，点为直线上一动点，过点作直线,与抛物线分别切于点,，则0.

[解析]由，得，则，

设，，，

所以，，

所以切线的方程为，即，

切线的方程为，即，

又两条切线均过点，

所以，，

所以，是方程即的两个实根，得，，

又，，

所以

.

将，代入上式，得.

#### **考点三 与弦有关的问题［多维探究］**

##### **一般弦角度1**

典例3 （一题多解）若过双曲线的右焦点作倾斜角为 的直线，交双曲线于，两点，则弦长8.

[解析]由双曲线，得，，

右焦点为，倾斜角 .

（法一:韦达定理法）直线斜率，直线方程为，设，，

联立消去得，由韦达定理知代入弦长公式，得.

（法二：焦点弦法）.



**求解弦长的三种方法**

1.当弦的两端点坐标易求时，可直接利用两点间的距离公式求解；

2.当直线斜率存在时，联立直线与曲线的方程，消元得到关于（或）的一元二次方程，利用韦达定理及弦长公式求解；

3.当弦过焦点时，可结合焦点弦公式求解弦长.

##### **中点弦角度2**

典例4 [2024·河南模拟]已知直线与椭圆交于,两点，若点恰为弦的中点，则椭圆的离心率是( A ).

A. B. C. D.

[解析]依题意，直线的斜率为，

设,，则，且

由两式相减得，

于是，

解得，此时椭圆，显然点在椭圆内，符合要求，所以椭圆的离心率.故选.



**解决圆锥曲线中与弦的中点有关问题的两种方法**

|  |  |
| --- | --- |
| 韦达定理法 | 将直线方程代入圆锥曲线的方程，消元后得到一个一元二次方程，利用韦达定理和中点坐标公式建立等式求解 |
| 点差法 | 设出直线与圆锥曲线的交点坐标,，代入圆锥曲线方程，通过作差，构造出,,,，从而建立弦的中点和直线斜率的关系 |

##### **焦点弦角度3**

典例5 [2024·重庆校考]（多选题）在平面直角坐标系中，已知，过点可作直线与曲线交于，两点，使，则曲线对应的方程可以是( BCD ).

A. B. C. D.

[解析]由题意，且根据选项可得，恰为四个曲线的焦点.

对于,抛物线的焦点弦弦长的最小值为，故不存在弦长，所以不正确；

对于,在椭圆中，根据椭圆的性质，可得焦点弦弦长的取值范围为，即，而，所以正确；

对于,若,同在右支上，则焦点弦弦长的取值范围为，即，因为，所以正确；

对于，若,在异支上，则焦点弦弦长的取值范围为，即，因为，所以正确.故选.



**圆锥曲线焦点弦的相关结论**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 图形 | 结论 |
| 椭圆 |  | ,  , |
| 双曲线 |  |  |
| 抛物线 |  | ,,  ,  ,  , |

##### **多维训练**

1. [2024·西安模拟]已知直线与圆相切，且交椭圆于,两点，若，则.

[解析]设直线，

直线与圆相切，

,，

将直线的方程与椭圆方程联立，得，，

，,,，

由对称性，不妨取,，,

.

2. [2024·四川模拟]已知抛物线的焦点为，直线与交于，两点，线段的垂直平分线交轴于点，则6.

[解析]由题意得，设线段的中点为，

则，设直线的斜率为，

则线段的垂直平分线方程为，

令，得，即，又作差得，整理得，所以，.

3. 已知椭圆的左焦点为，离心率为，倾斜角为 的直线与交于,两点，并满足，则.

[解析]设,，则，由，消去得，

注意到，则，于是，同理，，

因此.

因为直线的倾斜角为 ，所以直线的斜率，

根据弦长公式，可得.

由，可得，故.

因为，所以.

### **拓展教材 深度学习**

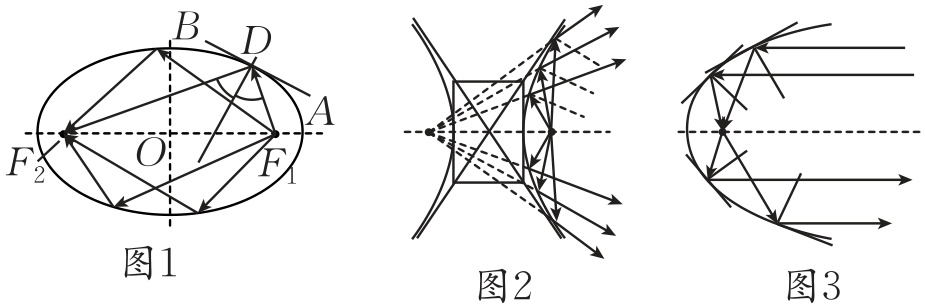
**圆锥曲线的光学性质**

**一、圆锥曲线的光学性质**

1.椭圆的光学性质：如图1，从椭圆的一个焦点出发的光线，经过椭圆反射后，反射光线经过椭圆的另一个焦点.

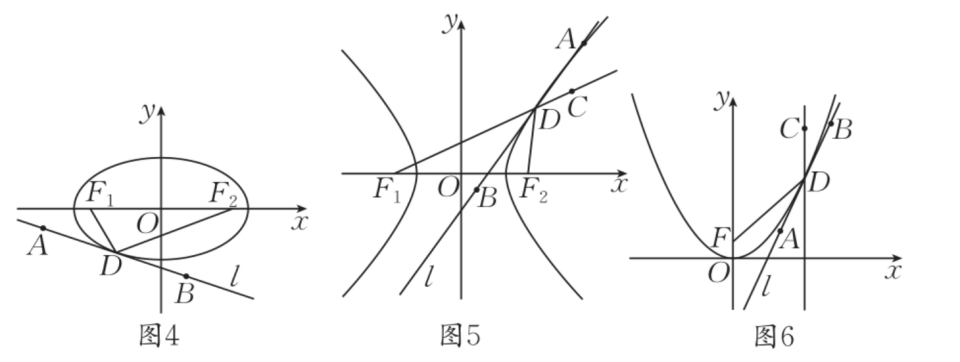
2.双曲线的光学性质：如图2，从双曲线的一个焦点出发的光线，经过双曲线反射后，反射光线是散开的，它们好像是从另一个焦点射出的一样.

3.抛物线的光学性质：如图3，从焦点出发的光线，经抛物线上的一点反射后，反射光线平行于抛物线的对称轴；平行于抛物线对称轴的入射光线经抛物线反射后必过抛物线的焦点.

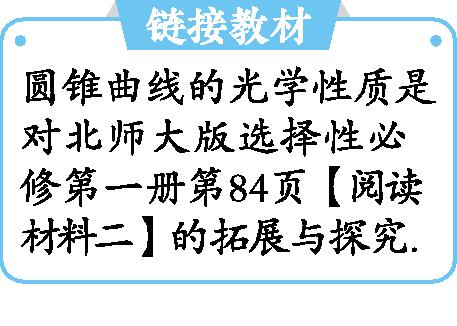


**二、圆锥曲线的光学性质的引申**

引申1:如图4，椭圆，，分别是其左、右焦点，是过椭圆上一点的切线，，是直线上的两点（不同于点），则.（入射角等于反射角）



引申2:如图5，双曲线，，分别为其左、右焦点，是过双曲线上一点的切线，，是直线上的两点（不同于点），连接并延长，在延长线上取点，则.（入射角等于反射角） 引申3:如图6，抛物线，为其焦点，是过抛物线上一点的切线，，是直线上的两点（不同于点），直线平行于轴，则.（入射角等于反射角）



典例（1） （多选题）椭圆具有这样的光学性质：从椭圆的一个焦点发出的光线，经过椭圆反射后，反射光线经过椭圆的另一个焦点.请根据椭圆的这一光学性质解决以下问题：已知椭圆，其左、右焦点分别是，，直线与椭圆相切于点，且，关于直线的对称点为，过点且与直线垂直的直线与椭圆的长轴交于点，则下列结论正确的是( BCD ).

A. B. ，，三点共线

C. D.

[解析]由题意可知，，，，即，因为，所以，所以，且，则，故错误；根据结合光线反射可知，，故正确；设，根据对称性可知，，所以 ，故，，三点共线，故正确；在中，由正弦定理，得，同理，在中，，因为，所以，所以，则，即，故正确.故选.

（2） （多选题）抛物线的光学性质：从焦点发出的光线经过抛物线上的点反射后，反射光线平行于抛物线的对称轴，且法线垂直于抛物线在点处的切线.已知抛物线上任意一点处的切线为，直线交抛物线于，，抛物线在，两点处的切线相交于点.下列说法正确的是( BCD ).

A. 直线的方程为

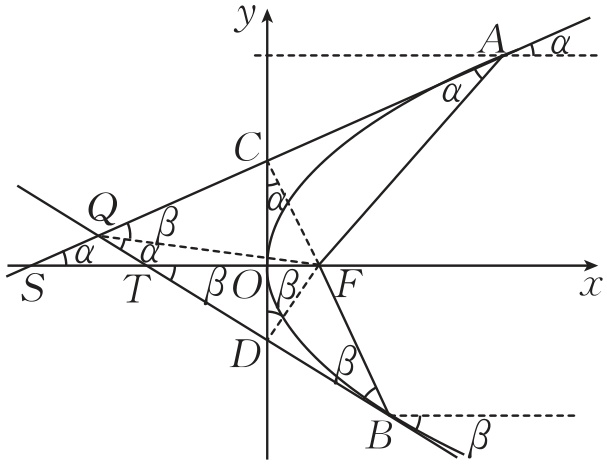
B. 记弦的中点为，则平行于轴或与轴重合

C. 切线与轴的交点恰在以为直径的圆上

D.

[解析]如图，设的方程为，，与抛物线方程联立得，则必有，，，所以，，代入的方程整理得，故错误；

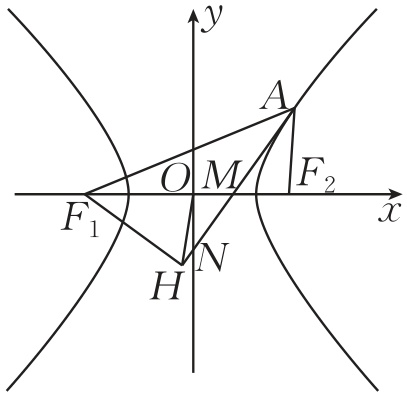
由已知得，抛物线在点处的切线，在点处的切线，设点，则满足方程组则，是直线上的两个点，由于经过，两点的直线有且仅有一条，故的方程为，变形为，又直线的方程为，两式对应系数得，，所以平行于轴或与轴重合，故正确；



如图，记切线与轴的交点为，，，所以，所以，同理，对于切线与轴的交点，亦有，故 ，所以，，，四点共圆，且为直径，故正确；

如图，记切线与轴的交点为，过作轴的平行线，由抛物线光学性质得，，由等腰，,，，，四点共圆（同弦圆周角相等），可得图中所示的五个角 相等,同理，五个角 相等,则，所以，故正确.故选.

深度训练1 [2024·潍坊模拟]（多选题）双曲线的光学性质：从双曲线的一个焦点发出的光线，经双曲线反射后，反射光线的反向延长线经过双曲线的另一个焦点.由此可得，过双曲线上任意一点的切线平分该点与两焦点连线的夹角.如图，，分别为双曲线的左、右焦点，过右支上一点作直线交轴于点，交轴于点，则( ACD ).



A. 的渐近线方程为

B. 点的坐标为

C. 过点作，垂足为，则

D. 四边形面积的最小值为4

[解析]对于，由已知可得，，所以的渐近线方程为，故正确；对于，设，则，整理可得，又，所以，所以，解得，所以点的坐标为，故错误；对于，如题图，显然为双曲线的切线，由双曲线的光学性质可知，平分，延长与的延长线交于点（图略）,则垂直平分，即为的中点,又是的中点，所以，故正确；对于，，当且仅当，即时，等号成立，所以四边形面积的最小值为4，故正确.故选.

深度训练2 （多选题）抛物线有如下光学性质：由其焦点射出的光线经抛物线反射后，沿平行于抛物线对称轴的方向射出；反之，平行于抛物线对称轴的入射光线经抛物线反射后必过抛物线的焦点.已知抛物线，为坐标原点，一条平行于轴的光线从点射入，经过上的点反射后，再经上另一点反射后，沿直线射出并经过点.下列说法正确的是( ABD ).

A. 若，则

B. 若，则平分

C. 若，则

D. 若，延长交直线于点，则，，三点共线

[解析]若，则抛物线，，的焦点为，则直线的方程为，可得，，故正确；

当时，因为，所以，又，所以，所以平分，故正确；

若，则抛物线，，的焦点为，则直线的方程为，联立抛物线方程求解可得，所以，故错误；

若，则抛物线，，延长交直线于点，则，由选项可知，所以，，三点共线，故正确.故选.